(iii) $\cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \underbrace{i\sin(2\pi)}_{0} = 1} =$

$= e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

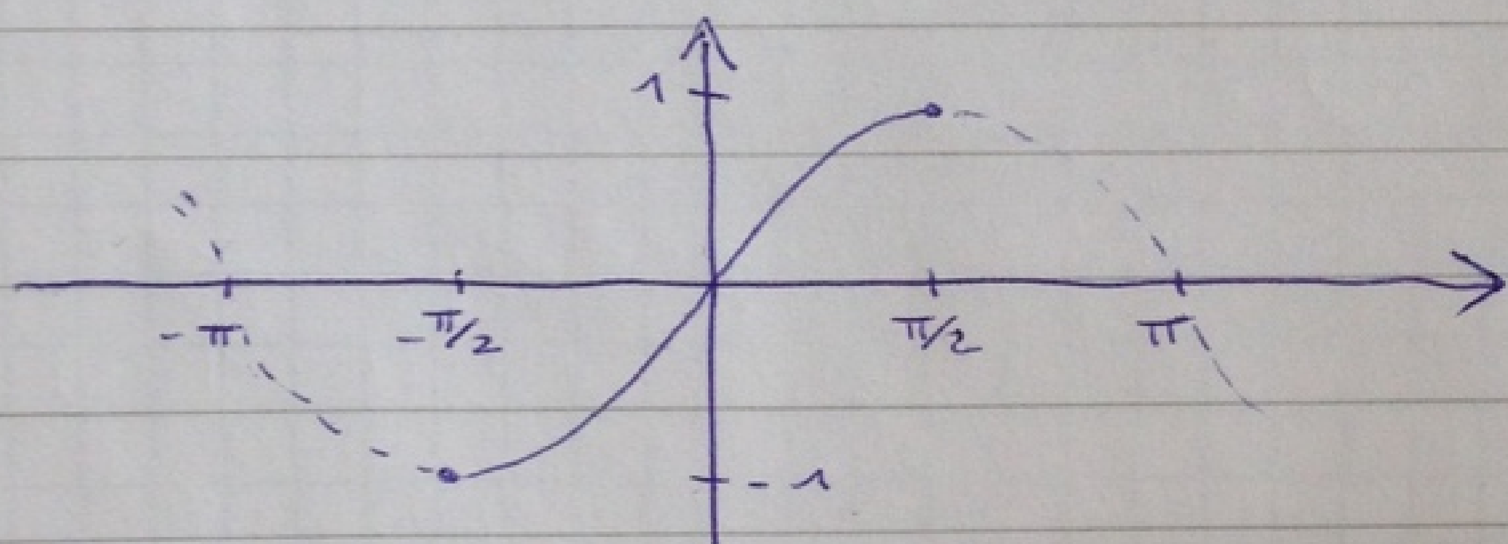
($\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind 2π-periodisch)

(iv) Konstanten i, e, π:

$$e^{i\pi} = -1 = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{i\sin(\pi)}_{=0}$$

(v) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot \mathbb{Z}\}$



$f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ist streng monoton wachsend und stetig

3\. Kap. Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ stetig}$$

$\sin(x) = -\sin(-x)$, dh $\sin(x)$ ist ungerade

$\sin(0) = 0$

$$\cos(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ stetig}$$

$\cos(x) = \cos(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, dh $\cos(x)$ ist gerade.

$\cos(0) = 1$

Stetigkeit von $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, folgt aus der Eulerformel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

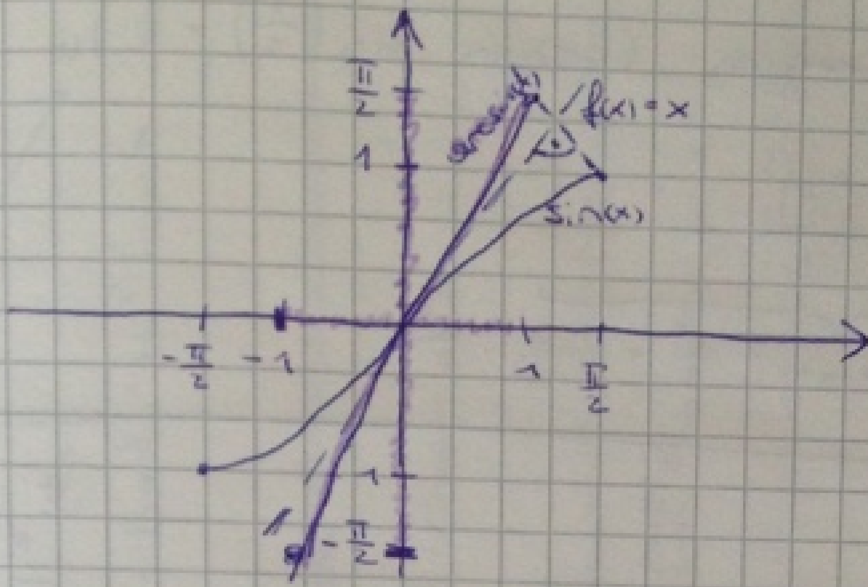
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \\ e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x) \end{array} \right.$$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k-1) : k \in \mathbb{Z} \right\}$

ist stetig als ein Quotient aus stetigen Funktionen.

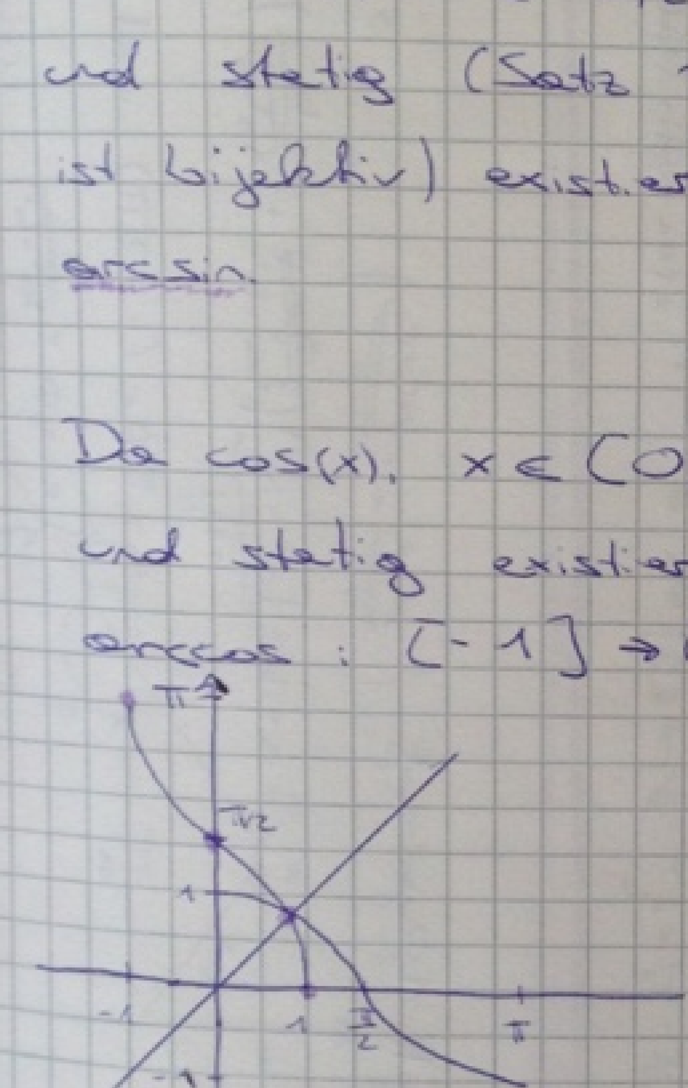
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}$

ist stetig als ein Quotient ...

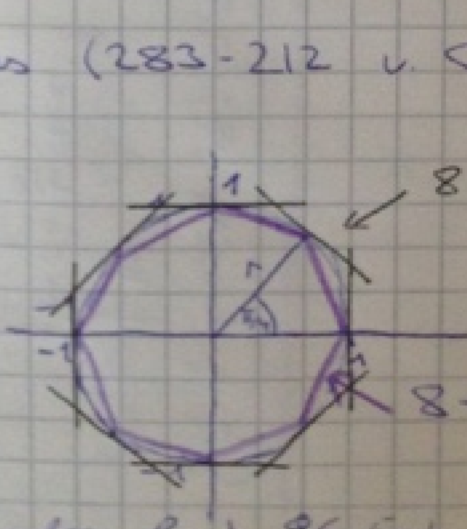


Da $\sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, streng monoton steigend und stetig (Satz 3.6 $\Rightarrow \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ist bijektiv) existiert eine stetige Umkehrfunktion arcsin.

Da $\cos(x)$, $x \in [0, \pi]$, streng mon. fallend und stetig existiert eine stetige Umkehrfunktion arccos : $[-1] \to [0, \pi]$



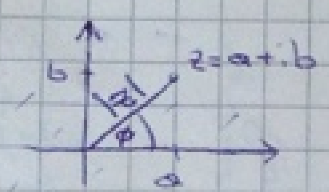
Archimedes (283-212 v. Chr.) $3\frac{10}{71} \le \pi \le 3 \cdot \frac{1}{7}$



8-Eck: Berechne den Umfang $\approx 2\pi$ als obere Schranke

8-Eck: Berechne den Umfang $\approx 2\pi$ als untere Grenze

Archimedes hat 96-Eck gezeichnet



Die ganze (lückenlose) Ebene ist die Menge der komplexen Zahlen, d.h. $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(a(n)+ib(n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$. $\lim_{n\to\infty}(a(n)+ib(n)) =$
$= \lim_{n\to\infty} a(n) + i \lim_{n\to\infty} b(n) =$
$= \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{b}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{\underbrace{a+ib}: a,b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

Kartesische Darstellung als Punkt (a,b) in d. Ebene $\mathbb{R}^2$

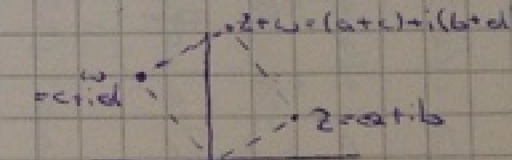
$= \{|z|(\cos\phi + i\sin\phi) : |z| \in [0,\infty), \phi \in [0, 2\pi)\}$, $= \sqrt{a^2+b^2}$

Polardarstellung von z als Punkt auf den Kreis um $(0,0)$ mit dem Radius $|z|$ mit dem (Polar)winkel ϕ zwischen der x-Achse und dem Strahl durch (a,b)

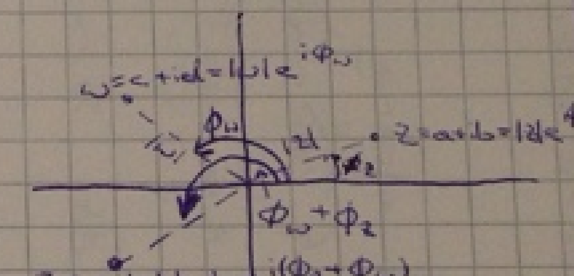
$= \{\underbrace{|z|e^{i\phi}} : |z| \in [0,\infty), \phi \in [0,2\pi)\}$
wegen Eulerformel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

$\mathbb{C}$ ist ein Körper (d.h. man kann mit komplexen Zahlen rechnen) mit

- Addition (Vektoraddition)



- Multiplikation (Drehstreckung)



$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\phi_z + \phi_w)} =$
$= (ac - bd) + i(ad + cb)$

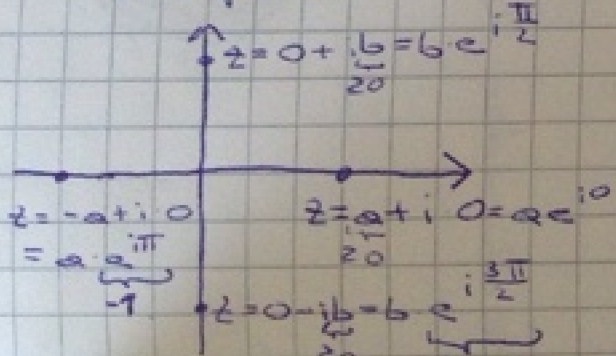
π: Th. F. de Lagny (wegen $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$)

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots$

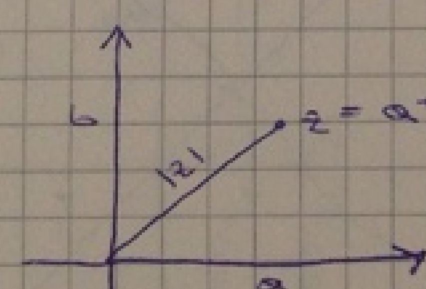
$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} \dots$

Umrechnung $a+ib \Leftrightarrow |z|e^{i\phi}$

Spezialfälle



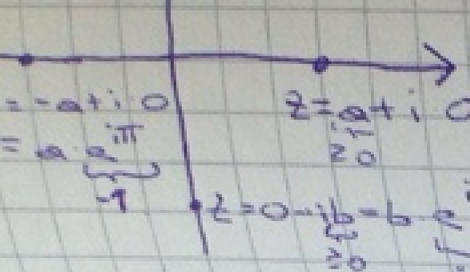
Fall: 1. Quadrant



$z = a + ib = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{=|z|}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = |z| \cdot e^{i\phi}$

wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ und

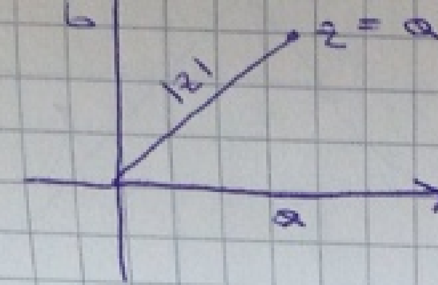
$\begin{cases} \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ (Löse nach ϕ auf)



$z = -a + i\cdot 0 = a \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1}$

$z = \underset{\geq 0}{a} + i\, 0 = a e^{i0}$

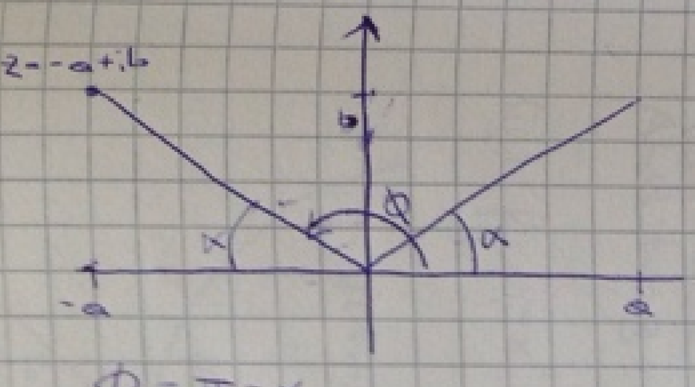
$z = 0 - ib = \underset{\geq 0}{b} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$



$z = a + ib = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{=|z|} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = |z| \cdot e^{i\phi}$

wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ und

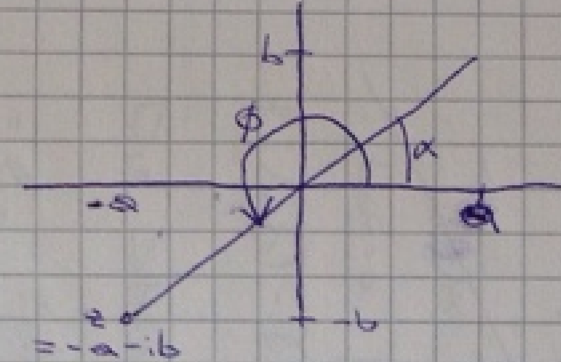
$\begin{cases} \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ (Löse nach ϕ auf)



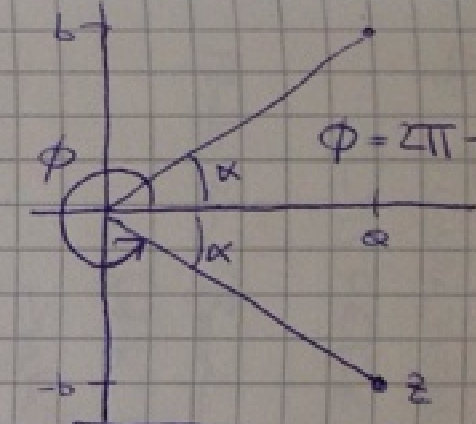
$\phi = \pi - \alpha$

$z = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) =$

$= |z| (-\cos\alpha + i \sin\alpha)$



$z = \sqrt{a^2+b^2} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$



$\phi = 2\pi - \alpha$

$z = a - ib = \sqrt{a^2+b^2} (\cos\alpha - i \sin\alpha)$

$\mathbb{R}$ ist der ganze (lückenlose) Zahlenstrahl

d.h. $\mathbb{R}$ ist vollständig

d.h. jede Cauchy-Folge $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} a(n) = A \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R} : A = \{ a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folgen $\lim a_n = A \} \}$

Menge (Äquivalenzklassen) von Näherungen (rationale Zahlen an) an A

Jede reelle Zahl wird durch Näherungen (rationale Zahlen) beschrieben

Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besteht aus irrationalen Zahlen (nicht periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen)

(Reihen $\left(\pm \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot 10^{-k} \right) \cdot 10^{B}$, $d_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B \in \mathbb{N}$)

$\mathbb{R}$ ist ein Körper mit

- Addition
  $A + B =$ Dezimaldarst. v. A + Dezimaldarst. v. B
- Multiplikation (analog wie +)

Vgl. mit Multiplikation bei kompl. Zahlen

$A(-B) = -(AB) = |A||B| \underbrace{e^{i(\pi+0)}}_{-1}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, ggT(p,q) = 1 \}$

Falls man alle rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl zeichnet,
• dann sieht der Zahlenstrahl lückenlos aus d. Entfernung aus, dh $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$
d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:
$\frac{p}{q} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon), A \in \mathbb{R}$

• beim Einzoomen sieht man die Lücken, d.h. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig
d.h. es existieren Cauchy-Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren
$\lim_{n \to \infty} a_n = A \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ist ein Körper mit

• Addition
$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$
• Multiplikation
$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$
exakte Rechnung

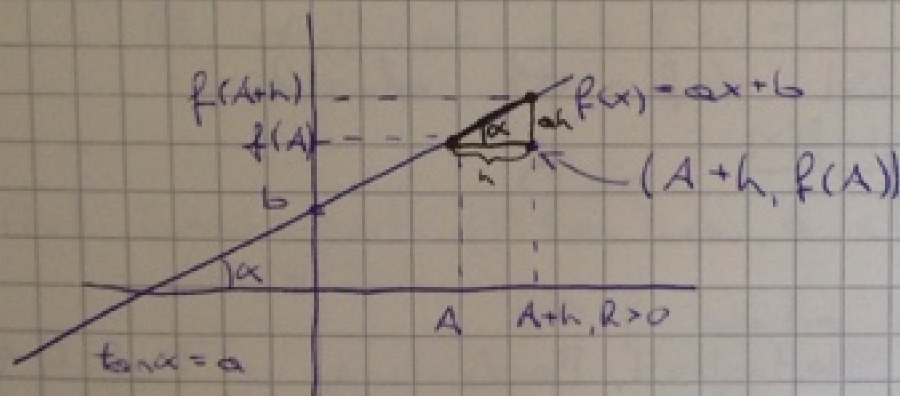
rationale Zahlen haben Dezimaldarstellungen (werden wie reelle Zahlen addiert). Rechnung m. Rundungsfehlern

4 Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Problem: Berechne d. Steigung $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an d. Stelle $A \in D$ (d.h. berechne die $\underbrace{\text{Steigung d. Tangente}}_{= f'(A)}$ an der Stelle $A \in D$)

<u>Beispiele:</u>

(i) $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$



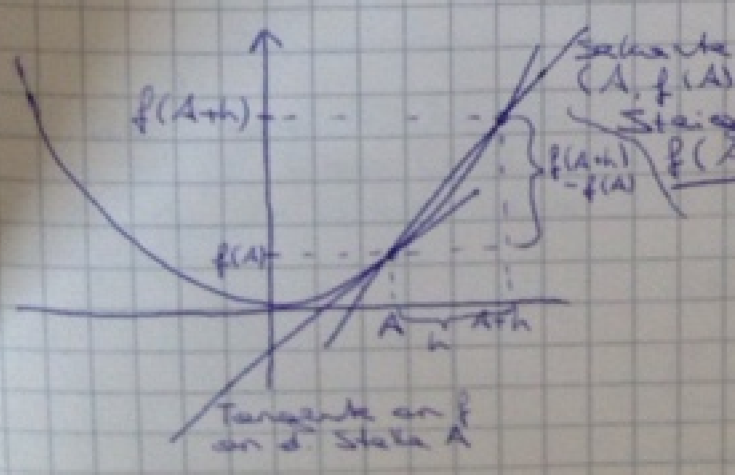
$$f(A+h) - f(A) \underset{\text{Def. v. } f}{=} a(A+h) + b - (aA + b) = ah$$

Die Steigung d. Gerade $ax+b$ ist $\tan\alpha = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h}} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a = \boxed{f'(A)}$$

Also die Steigung der Gerade (= Tangente) ist die Ableitung von f an der Stelle $A \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$



Sekante durch $(A, f(A))$, $(A+h, f(A+h))$

Steigung dieser Sekante ist $\frac{f(A+h) - f(A)}{h}$

Steigung d. Tangente ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h} = f'(A) = 2A$$

Sh. next page

Tatsächlich:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(A+h)-f(A)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(A+h)^2-A^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2Ah+h^2}{h}=2A+\lim_{h\to 0}h$$

4.1 Def. Eine Funktion $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt diff-bar an der Stelle $A\in D$, wenn

$$f'(A)=\lim_{h\to 0}\frac{f(A+h)-f(A)}{h}$$

dieser Grenzwert existiert (d.h. $f'(A)\in\mathbb{R}$).

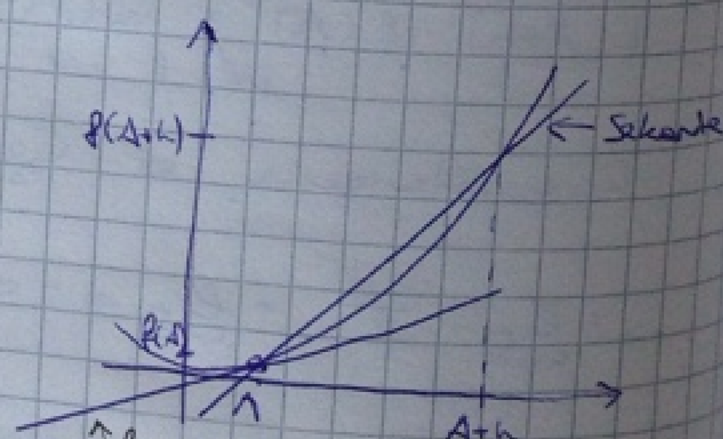
•) Falls f an jeder Stelle $A\in D$ diff.bar ist, dann ist f auf D differenzierbar und die Ableitung(sfunktion)

$f': D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad,\ x\in D$$

Beispiele, Vergleich m. Stetigkeit, Bedeutung v. Def 4.1:

(i)
$$\underbrace{f'(A)}_{\text{Steigung von } f \text{ an d. Stelle } A} = \underbrace{\lim \underbrace{\frac{f(A+h)-f(A)}{h}}_{\text{Steigung d. Sekante durch } (A, f(A)) \text{ und } (A+h, f(A+h))}}_{\text{Steigung d. Tangente an d. Stelle } A}$$



für $h\to 0$ wird die Sekante zur Tangente an d. Stelle A

$$f'(A)=\lim_{x\to A}\frac{f(A+x-A)-f(A)}{x-A}$$

Substitution: $h = x - A$